WI3411TU
Monte Carlo Methods
Huiswerk 1

Lucas de Vries 1522442

21 november 2011

(Vragen beantwoord in de taal waarin ze gesteld zijn - het is makkelijker om niet de hele tijd te moeten switchen.)

13.5

We want to know:

$$\begin{aligned} P(|\bar{X}_n - \mu| < 0.5) &\leq \frac{1}{0.5^2}\mathrm{Var}(\bar{X}_n) \\ &\leq 4\frac{3}{n} \end{aligned}$$

This is ≤ 0.1 when $n \geq 120$.

13.6

Let X_i be the ith game played in a year.

Then for each i:

$$\begin{aligned} E[X_i] &= \frac{19}{37} * 1 + \frac{18}{37} * -1 = \frac{1}{37} \\ \mathrm{Var}(X_i) = E[(X_i - \mu)^2] &= \frac{19}{37} * |1 - \frac{1}{37}|^2 + \frac{18}{37} * |-1 - \frac{1}{37}|^2 \approx 0.999 \end{aligned}$$

Because $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} X_i$, the income per year $S_n = \sum_{i=0}^{n} X_i = n\bar{X}_n$

We can use the law of large numbers to determine X_n, because

$$P(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

At a 99% confidence level, the ε is as low as 0.005, which is insignificant compared to the expected value. Thus we estimate $\bar{X}_n$ as $E[X_i]$ and get $S_n = n\bar{X}_n \approx 9864.86$.

14.8

a

$$E[X_i^2] = \mathrm{Var}(X_i) + E[X_i]^2 = 1 + 0^2 = 1$$

b

$$\mathrm{Var}(X_i^2) = E[X_i^4] - E[X_i^2]^2 = 3 - 1^2 = 2$$

c

Let $Q_i = X_i^2$, then $Y_n = n\bar{Q}_n$.
From the previous exercise we know that:

$$\begin{aligned} \mu &= E[Q_i] = E[X_i^2] = 1 \\ \sigma^2 &= \mathrm{Var}(X_i^2) = 2 \end{aligned}$$

So:

$$\begin{aligned} P(Y_n > 110) &= P(n\bar{Q}_n > 110) \\ &= P(\bar{Q}_n > 1.1) \\ &= P(\bar{Q}_n - \mu > 0.1) \\ &= P\left(\frac{\bar{Q}_n - \mu}{\sigma} > \frac{0.1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= P\left(\sqrt{n}\frac{\bar{Q}_n - \mu}{\sigma} > \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

From the central limit theorem:

$$\begin{aligned} P(Y_n > 110) &\approx 1 - \Phi(0.707) \\ &\approx 0.240 \end{aligned}$$

Blackboard

a

Uit deze tabel kunnen we zien hoe accuraat de confidence intervals daadwerkelijk zijn voor verschillende distributies en een bepaalde n.

Als de nummers in de γ kolom dicht bij de gekozen levels komen is de n dus hoog genoeg.

Blijkbaar speelt ook het type distributie een zekere rol, want voor de Par(2.1) zijn de getallen veel verder weg, en hebben we dus waarschijnlijk een hogere n nodig, waar bij de Exp(1) lagere ns al voldoen.

b

Ze doen 10,000 herhalingen van de simulatie van het confidence interval, niet 10,000 samples per confidence level. Als de sample size voor elke confidence interval laag is zal de coverage probability dus alsnog veel afwijken, hoe vaak de simulatie ook herhaald wordt.